

Lista zadań nr 9 (poziom rozszerzony)

Zad. 1 (3 pkt.) Oblicz $a_{101} - a_1$, jeżeli ciąg b_n jest nieskończonym ciągiem o wyrazach dodatnich oraz ciąg a_n spełnia warunek:

$$a_{n+1} - a_n = \log 2b_n - \log b_{101-n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, 100.$$

Zad. 2 (3 pkt.) Oblicz iloczyn 2018 początkowych wyrazów geometrycznego ciągu a_n , jeżeli suma 2018 początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 1417 oraz suma odwrotności tych wyrazów jest równa 109.

Zad. 3 (3 pkt.) Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego a_n jest równy 2, a iloraz tego ciągu wynosi 10. Udowodnij, że punkty o współrzędnych $(2n, \log a_n)$ leżą na jednej prostej.

Zad. 4 (3 pkt.) Na bokach AD i CD kwadratu ABCD o boku długości 1 wybrano odpowiednio punkty E i F w taki sposób, że $|AE| = 1/k$ oraz $|DF| = 1/m$, gdzie $k, m > 1$. Oznaczmy przez P punkt przecięcia odcinków AF i BE. Udowodnij, że $k = m$, jeżeli tylko trójkąt ABP jest prostokątny. Oblicz cosinus kąta APB, jeżeli $k = 3$ oraz $m = 2$.

Zad. 5 (3 pkt.) W czworoboku ABCD punkty K, L, M i N są środkami odpowiednio krawędzi AD, CD, BC i AB. Udowodnij, że czworokąt KLMN jest równoległobokiem.

Zad. 6 (3 pkt.) Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez wysokość dolnej podstawy oraz przez ten wierzchołek górnej podstawy, dla którego ta płaszczyzna tworzy z podstawą graniastosłupa kąt α nie będący kątem prostym. Pole przekroju graniastosłupa wyznaczonego przez rozważaną płaszczyznę wynosi P.

Zad. 7 (3 pkt.) Trójkąt ABC jest ostrokątny oraz $|AB| = c$, $|AC| = b$, a kąt BAC ma miarę α . Dwusieczna kąta BAC przecina przeciwległy bok w punkcie D, gdzie $|AD| = d$. Udowodnij, że

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2b} + \frac{d}{2c}.$$

Zad. 8 (3 pkt.) Prosta, na której leży punkt o współrzędnych (2,5) przecina parabolę $y = x^2$ w dwóch różnych punktach o rzędnych równych odpowiednio a i b . Oblicz współczynnik kierunkowy tej prostej, dla której suma a i b ma najmniejszą wartość.

Zad. 9 (4 pkt.) W trójkącie ABC środkowa poprowadzona z wierzchołka A jest prostopadła do boku AC, zaś bok AB jest dwa razy dłuższy niż bok AC. Oblicz miarę kąta BAC.

Zad. 10 (5 pkt.) Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, jeżeli odległość środka wysokości tego ostrosłupa od ściany bocznej jest równa b oraz krawędź boczna tworzy z podstawą kąt α .

Zad. 11 (3 pkt.) Udowodnij, że dokładnie dla dwóch różnych liczb naturalnych k istnieje trójkąt o bokach k , $k + 2$, $k + 3$, który jest rozwartokątny.

Zad. 12 (2 pkt.) Wyznacz liczbę n , wiedząc że

$$\binom{n}{3} - \binom{n}{2} = 14.$$

Zad. 13 (2 pkt.) Na ile sposobów można umieścić sześć ponumerowanych kul w pięciu ponumerowanych szufladach tak, aby w każdej szufladzie była przynajmniej jedna kula.